Kolokwium treningowe (praca domowa)

Zasady rozwiązywania. Poniższe pięć zadań należy samodzielnie rozwiązać, a następnie oddać na piśmie. Dopuszczalna jest forma papierowa (czytelnym pismem) i elektroniczna (dokument zredagowany w TeXu lub skan czytelny po wydrukowaniu). Można i należy korzystać z twierdzeń dowiedzionych na wykładzie i ćwiczeniach, ale w przypadku twierdzeń bez nazwy/nazwiska należy wskazać na założenia i tezę wykorzystywanego twierdzenia.
Rozwiązania należy oddać **do środy 27 listopada** (do północy, jeśli chodzi o wersję elektroniczną). Ponadto można dostarczyć pracę do niedzieli 24 listopada, wówczas ma się pewność otrzymania sprawdzonej pracy przed kolokwium.

Zakres i charakter zadań. Zakres obowiązujący na kolokwium zostanie (został?) ustalony przez wykładowcę. Poniżej konieczny materiał kończy się na pochodnych wyższego rzędu (rozpoznawanie ekstremów) i wzorze Taylora, a pomija twierdzenie o funkcji odwrotnej, twierdzenie o funkcji uwikłanej i dyfeomorfizmy.
Zadania nie odbiegają charakterem od typowych zadań egzaminacyjnych, są jednak bardziej pracochłonne, głównie ze względu na podpunkty.

Inne uwagi. Chociaż będę oceniać podobnie jak oceniane są kolokwia, to przy okazji spisywania rozwiązywań polecam poświęcić szczególną uwagę na detale rozumowań, np.

- Dlaczego można wejść z różniczkowaniem pod znak całki?
- Dlaczego infimum jest przyjmowane? Dlaczego w znalezionym punkcie jest minimum?
- Dlaczego znaleziona macierz symetryczna jest dodatnio/ujemnie określona albo nieokreślona?

W ten sposób można w porę sprawdzić, czy rzeczywiście się zna i rozumie wykorzystywane twierdzenia.

Zadanie 1. Znaleźć wszystkie wektory styczne do zbiorów

$$A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y - e^x)(x - e^{3y} + 1)\Big((x-4)^2 + (y-3)^2 - 25\Big) = 0\Big\},$$

$$B = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (y^2 - 4x^2)(y - 2x - 4x^2) = 0\Big\}$$

$$\text{oraz } A \cup B$$

w punkcie $p = (0,0)$.

Zadanie 2. Dana jest funkcja $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ klasy C^1. Wyrazić pochodne cząstkowe $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danej wzorem

$$h(x,y) = \int_{xy}^{x^2} f(xy^2, e^{xy}, t)\, \mathrm{d}t$$

przez pochodne cząstkowe f.

Wskazówka. Rozważyć pomocniczo funkcję

$$H(x_1, x_2, a, b) = \int_a^b f(x_1, x_2, t)\, \mathrm{d}t.$$

Zadanie 3. Niech

$$A_1 = A_2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\Big\},$$

$$B_1 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = 9\Big\},$$

$$B_2 = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + 2y - z = -9\Big\},$$

$$A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 1\},$$

$$B_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = -1\}.$$

Dla każdego $i = 1,2,3$ znaleźć punkty $p_0 \in A_i$, $q_0 \in B_i$ realizujące infimum

$$\inf\{\|p - q\| : p \in A_i,\ q \in B_i\}$$

lub wykazać, że takie nie istnieją.

Zadanie 4. Znaleźć wszystkie punkty krytyczne wielomianów

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy,$$
$$g(x,y) = (x-y)(xy-1).$$

Dla każdego z nich stwierdzić, czy jest to lokalne minimum, lokalne maksimum, czy żadne z tych dwóch.

Zadanie 5. Dane są funkcje $f, g \in C^4(\mathbb{R}^2)$ spełniające

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \operatorname{tg} x \sin y}{x^2+y^2} = 2,$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{g(x,y) - \operatorname{tg} x \sin y}{(x^2+y^2)^2} = 3.$$

Wyznacz następujące pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^4 g}{\partial x^2 \partial y^2}, \ \frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}.$$